BOSE-EINSTEIN DISTRIBUTION

Reporter : Yao-Hsiang Chen

Yin-Chan Huang

Date : 2010/12/21

玻色子：自旋量子數為整數的粒子

玻色系統：由多個全同近獨立的玻色子組成的系統中，處在同一量子態的粒子數目不受限制

假設一個系統

能　階：$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_l, \cdots$

簡并度：$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_l, \cdots$

粒子數：$a_1, a_2, \cdots, a_l, \cdots$

表示在能階ε_l上，

有ω_l個量子態及a_l個粒子

在給定粒子數N、能量E和體積V下

限制條件：

$$\sum_l a_l = N \qquad \sum_l a_l \varepsilon_l = E$$

此玻色系統中

假設在ε_1上有2個量子態及3個粒子

□ 量子態　○ 粒子

若以 □～□ 之間的○數表示左邊量子態上的粒子數目的話

1. □○○○□
2. □○○□○
3. □○□○○
4. □□○○○

~~○□○□○~~

?

在某一特定能階排列方式：

[(量子態數－1)+粒子數]!／粒子數!(量子態數－1)!

考慮所有能階排列方式（各能階可能排列數相乘）：

$$\Omega = \prod_l \frac{(\omega_l + a_l - 1)!}{a_l!(\omega_l - 1)!}$$

排列數，可能微觀狀態數

等概率原理：對處在平衡狀態的孤立系統，每一個可能的微觀狀態出現的概率是相等的 ⟶

微觀狀態數最多的分佈，出現的概率最大，是最概然分佈

Ω

在固定N、E下，能量為 ε_1，ε_2，……，ε_l，……，對應能量的粒子數目記為a_1，a_2，……，a_l，……$=\{a_l\}$

假設有2個分佈

A

微觀狀態數:2

B

微觀狀態數:5

因為每個微觀狀態出現機率一樣 假設是0.01

所以

選中A分佈中任一狀態機率:
2個0.01的聯集

選中B分佈中任一狀態機率:
5個0.01的聯集

故母群中任意一種微觀狀態，其屬於B分佈的機率比A分佈大

目標：$\boxed{\text{微觀狀態數最多}}$的$\boxed{\text{分佈}}$

Ω最大 $\{a_l\}$

$$\Omega = \prod_l \frac{(\omega_l + a_l - 1)!}{a_l!(\omega_l - 1)!}$$

在ω_l不變下，當Ω為最大時，a_l=?

對上式取對數 ⟶

$$\ln\Omega = \sum_l \left[\ln(\omega_l + a_l - 1)! - \ln a_l! - \ln(\omega_l - 1)!\right]$$

設$a_l >> 1$，$\omega_l >> 1$，則 $\omega_l + a_l - 1 \approx \omega_l + a_l \,;\, \omega_l - 1 \approx \omega_l$ ，可用近似式:

$$\ln m! = m(\ln m - 1)$$

則變成

$$\ln\Omega = \sum_l \left[(\omega_l + a_l)\ln(\omega_l + a_l) - a_l \ln a_l - \omega_l \ln \omega_l\right]$$

最大，極值

求極值 ➡ Lagrange 乘數法

2個變數，1個控制函數

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

$$g(x, y) = 0$$

1個變數(a_l)，2個控制函數(N, E)

$$\frac{\partial \ln \Omega}{\partial a_l} + \alpha \frac{\partial g_1}{\partial a_l} + \beta \frac{\partial g_2}{\partial a_l} = 0 \cdots\cdots (a)$$

$$g_1(a_l) = N - \sum_l a_l = 0 \cdots\cdots (b)$$

$$g_2(a_l) = E - \sum_l \varepsilon_l a_l = 0 \cdots\cdots (c)$$

整理(a)式：

$$\frac{\partial \sum_l \left[(w_l + a_l)\ln(w_l + a_l) - a_l \ln a_l - w_l \ln w_l\right]}{\partial a_l} + \alpha \frac{\partial (N - \sum_l a_l)}{\partial a_l} + \beta \frac{\partial (E - \sum_l \varepsilon_l a_l)}{\partial a_l} = 0$$

$$\sum_l \left[\ln \frac{w_l + a_l}{a_l} - (\alpha + \beta \varepsilon_l)\right] = 0$$

$$\therefore a_l = \frac{w_l}{e^{\alpha + \beta \varepsilon_l} - 1}$$

在特定ε_l及w_l下，微觀狀態數最多時的粒子數

再將所有能階對應的粒子數找出a_1，a_2，……，a_l，……$=\{a_l\}$

即是微觀狀態數最多時的分佈

$$a_l = \frac{w_l}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_l} - 1}$$ Bose–Einstein population numbers

$$N = \sum_l \frac{w_l}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_l} - 1}$$ Particle numbers

$$E = \sum_l \frac{w_l \varepsilon_l}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_l} - 1}$$ System energy

1.一玻色氣體有N個粒子，N>>1。每個粒子有兩個能級，能量分別為0和ε；簡并度分別為g_1和g_2。試確定低能級占有數為高能級占有數兩倍時的溫度T。

$$N_1 + N_2 = N$$

$$N_1 = \frac{2N}{3}$$

$$N_2 = \frac{N}{3}$$

$$N_i = \frac{g_i}{\exp\left[\frac{1}{kT}(\varepsilon_i - \mu)\right] - 1}$$

note :

$$\alpha = -\frac{\mu}{kT}$$

$$\beta = \frac{1}{kT}$$

$$N_1 = \frac{2N}{3} = \frac{g_1}{\exp\left[\frac{1}{kT}(-\mu)\right] - 1} \Rightarrow \mu = -kT\ \ln\left(1 + \frac{3g_1}{2N}\right)$$

$$N_2 = \frac{N}{3} = \frac{g_2}{\exp\left[\frac{1}{kT}(\varepsilon - \mu)\right] - 1} \Rightarrow \varepsilon - \mu = kT\ \ln\left(1 + \frac{3g_2}{N}\right)$$

$$T = \frac{\varepsilon}{k\ln\left[(2N + 6g_2)/(2N + 3g_1)\right]}$$

2.理想玻色氣體的粒子數、溫度及化學勢分別為N、T和μ；單粒子基態能級的能量和占有數分別ε_0、N_0. 試根據玻色-愛因斯坦分布，證明理想玻色氣體具有如下性質：

(1)

$$\lim_{T\to 0K} N_0 = N$$

$$N_i = \frac{g_i}{\exp[(\varepsilon_i - \mu)/kT] - 1}$$

$$\lim_{T\to 0K} N_{i>0} = 0$$

$$\lim_{T\to 0K} N_0 = \lim_{T\to 0K}\left(N - \sum_{i>0} N_i\right) = N$$

(2)

$$\lim_{T\to 0K} \mu = \varepsilon_0$$

$$\lim_{T\to 0K} (\varepsilon_0 - \mu) = 0$$

$$\lim_{T\to 0K} \mu = \varepsilon_0$$