

# **BOSE-EINSTEIN DISTRIBUTION**

Reporter : Yao-Hsiang Chen

Yin-Chan Huang

Date : 2010/12/21

玻色子：自旋量子數為整數的粒子

玻色系統：由多個全同近獨立的玻色子組成的系統中，處在同一量子態的粒子數目不受限制

假設一個系統

能階： $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_l, \dots$

簡并度： $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_l, \dots$

粒子數： $a_1, a_2, \dots, a_l, \dots$

表示在能階 $\varepsilon_l$ 上，

有 $\omega_l$ 個量子態及 $a_l$ 個粒子

在給定粒子數 $N$ 、能量 $E$ 和體積 $V$ 下

限制條件：

$$\sum_l a_l = N \quad \sum_l a_l \varepsilon_l = E$$

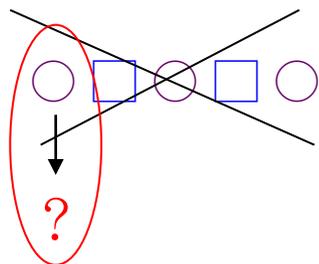
此玻色系統中

假設在 $\epsilon_l$ 上有2個量子態及3個粒子

□ 量子態    ○ 粒子

若以 □~□ 之間的○數表示左邊量子態上的粒子數目的話

1. □ ○ ○ ○ □
2. □ ○ ○ □ ○
3. □ ○ □ ○ ○
4. □ □ ○ ○ ○



在某一特定能階排列方式：

$$[(\text{量子態數}-1)+\text{粒子數}]! / \text{粒子數}!(\text{量子態數}-1)!$$

考慮所有能階排列方式（各能階可能排列數相乘）：

$$\Omega = \prod_l \frac{(\omega_l + a_l - 1)!}{a_l!(\omega_l - 1)!}$$

排列數，可能微觀狀態數

等概率原理：對處在平衡狀態的孤立系統，每一個可能的微觀狀態出現的概率是相等的 →  
微觀狀態數最多的分佈，出現的概率最大，是最概然分佈

$\Omega$

在固定N、E下，能量為  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_l, \dots$ ，對應能量的粒子數目記為  $a_1, a_2, \dots, a_l, \dots = \{a_l\}$

假設有2個分佈

A

微觀狀態數:2

B

微觀狀態數:5

因為每個微觀狀態出現機率一樣 假設是0.01

所以

選中A分佈中任一狀態機率：  
2個0.01的聯集

選中B分佈中任一狀態機率：  
5個0.01的聯集

故母群中任意一種微觀狀態，其屬於B分佈的機率比A分佈大

目標：微觀狀態數最多的分佈

$\Omega$ 最大

$\{a_l\}$

$$\Omega = \prod_l \frac{(\omega_l + a_l - 1)!}{a_l! (\omega_l - 1)!}$$

在 $\omega_l$ 不變下，當 $\Omega$ 為最大時， $a_l = ?$

對上式取對數  $\rightarrow$

$$\ln \Omega = \sum_l [\ln(\omega_l + a_l - 1)! - \ln a_l! - \ln(\omega_l - 1)!]$$

設 $a_l \gg 1$ ， $\omega_l \gg 1$ ，則 $\omega_l + a_l - 1 \approx \omega_l + a_l$ ； $\omega_l - 1 \approx \omega_l$ ，可用近似式：

$$\ln m! = m(\ln m - 1)$$

則變成

$$\ln \Omega = \sum_l [(\omega_l + a_l) \ln(\omega_l + a_l) - a_l \ln a_l - \omega_l \ln \omega_l]$$

最大，極值

# 求極值 → Lagrange 乘數法

2個變數，1個控制函數

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

$$g(x, y) = 0$$

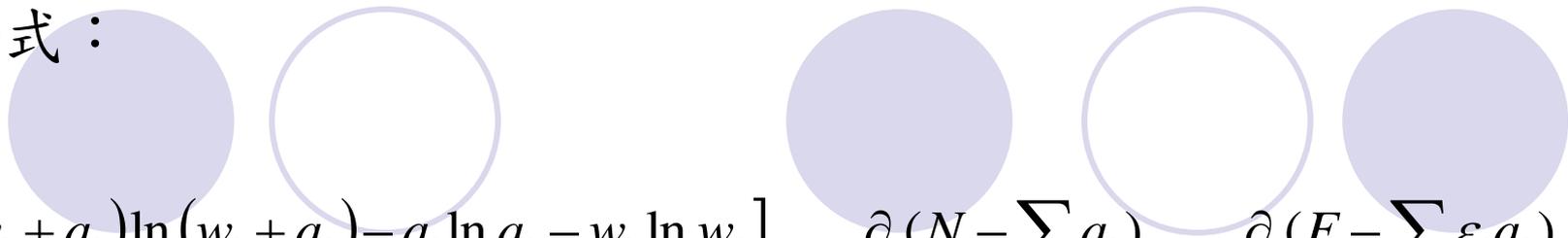
1個變數( $a_l$ )，2個控制函數(N, E)

$$\frac{\partial \ln \Omega}{\partial a_l} + \alpha \frac{\partial g_1}{\partial a_l} + \beta \frac{\partial g_2}{\partial a_l} = 0 \dots\dots (a)$$

$$g_1(a_l) = N - \sum_l a_l = 0 \dots\dots (b)$$

$$g_2(a_l) = E - \sum_l \varepsilon_l a_l = 0 \dots\dots (c)$$

整理(a)式：



$$\frac{\partial \sum_l [(w_l + a_l) \ln (w_l + a_l) - a_l \ln a_l - w_l \ln w_l]}{\partial a_l} + \alpha \frac{\partial (N - \sum_l a_l)}{\partial a_l} + \beta \frac{\partial (E - \sum_l \varepsilon_l a_l)}{\partial a_l} = 0$$

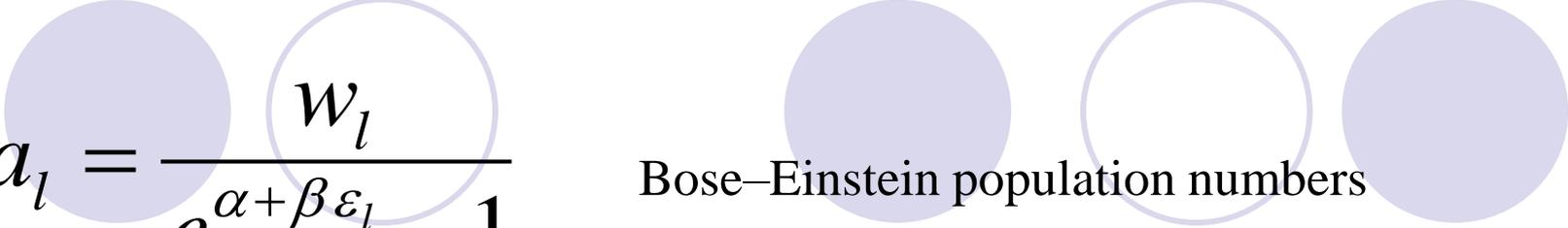
$$\sum_l \left[ \ln \frac{w_l + a_l}{a_l} - (\alpha + \beta \varepsilon_l) \right] = 0$$

$$\therefore a_l = \frac{w_l}{e^{\alpha + \beta \varepsilon_l} - 1}$$

在特定 $\varepsilon_l$ 及 $w_l$ 下，微觀狀態數最多時的粒子數

再將所有能階對應的粒子數找出 $a_1, a_2, \dots, a_l, \dots = \{a_l\}$

即是微觀狀態數最多時的分佈


$$a_l = \frac{w_l}{e^{\alpha + \beta \varepsilon_l} - 1}$$

Bose–Einstein population numbers

$$N = \sum_l \frac{w_l}{e^{\alpha + \beta \varepsilon_l} - 1}$$

Particle numbers

$$E = \sum_l \frac{w_l \varepsilon_l}{e^{\alpha + \beta \varepsilon_l} - 1}$$

System energy

1. 一玻色氣體有 $N$ 個粒子， $N \gg 1$ 。每個粒子有兩個能級，能量分別為 $0$ 和 $\varepsilon$ ；簡并度分別為 $g_1$ 和 $g_2$ 。試確定低能級占有數為高能級占有數兩倍時的溫度 $T$ 。

$$N_1 + N_2 = N$$

$$N_1 = \frac{2N}{3}$$

$$N_2 = \frac{N}{3}$$

$$N_i = \frac{g_i}{\exp\left[\frac{1}{kT}(\varepsilon_i - \mu)\right] - 1}$$

note :

$$\alpha = -\frac{\mu}{kT}$$

$$\beta = \frac{1}{kT}$$

$$N_1 = \frac{2N}{3} = \frac{g_1}{\exp\left[\frac{1}{kT}(-\mu)\right] - 1} \Rightarrow \mu = -kT \ln\left(1 + \frac{3g_1}{2N}\right)$$

$$N_2 = \frac{N}{3} = \frac{g_2}{\exp\left[\frac{1}{kT}(\varepsilon - \mu)\right] - 1} \Rightarrow \varepsilon - \mu = kT \ln\left(1 + \frac{3g_2}{N}\right)$$

$$T = \frac{\varepsilon}{k \ln\left[\frac{2N + 6g_2}{2N + 3g_1}\right]}$$

2. 理想玻色氣體的粒子數、溫度及化學勢分別為  $N$ 、 $T$  和  $\mu$ ；單粒子基態能級的能量和占有數分別  $\varepsilon_0$ 、 $N_0$ 。試根據玻色-愛因斯坦分布，證明理想玻色氣體具有如下性質：

(1)

$$\lim_{T \rightarrow 0K} N_0 = N$$

$$N_i = \frac{g_i}{\exp[(\varepsilon_i - \mu)/kT] - 1}$$

$$\lim_{T \rightarrow 0K} N_{i>0} = 0$$

$$\lim_{T \rightarrow 0K} N_0 = \lim_{T \rightarrow 0K} \left( N - \sum_{i>0} N_i \right) = N$$

(2)

$$\lim_{T \rightarrow 0K} \mu = \varepsilon_0$$

$$\lim_{T \rightarrow 0K} (\varepsilon_0 - \mu) = 0$$

$$\lim_{T \rightarrow 0K} \mu = \varepsilon_0$$